Proceedings of IAM, V.4, N.1, 2015, pp.26-39

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО –ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ*

С.С. Мирзоев[1], С.Б. Гейдарова[2]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку Азербайджан
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
e-mail: mirzoyevsabir@mail.ru

Резюме. В работе найдены условия, которые обеспечивают существование и единственности регулярных решений одной краевой задачи на конечном отрезке для операторно–дифференциального уравнения третьего порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве. Эти условия выражены свойствами операторных коэффициентов данного уравнения. При этом получены оценки норм операторов промежуточных производных в некоторых абстрактных пространствах типа Соболева, которые связаны с краевыми условиями. Оценки приводятся относительно нормы порожденный главной частью операторно-дифференциального уравнения. В работе указывается связь этих оценок с условиями регулярной разрешимости краевой задачи.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, операторно–дифференциальное уравнение, краевая задача, регулярное решение.

AMS Subject Classification: 46C05, 39B42.

1. Введение

Пусть H -сепарабельное гильбертово пространство, а A - положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$. Известно, что область определения оператора A^{γ} ($\gamma \ge 0$) $D(A^{\gamma})$ становится гильбертовым пространством H_{γ} относительно скалярного произведения $(x, y)_{\gamma} = (A^{\gamma}x, A^{\gamma}y)$, $x, y \in D(A^{\gamma})$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$ и $(x, y)_0 = (x, y)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H краевую задачу

$$u'''(t) + A^3u(t) + \sum_{j=0}^{3} A_{3-j}u^{(j)}(t) = f(t), \qquad t \in (0, 1) \tag{1}$$

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 17.02.2015

$$u(0)=0\,,\qquad u'(1)=u''(1)=0\,, \tag{2}$$

где $f(t)$, $u(t)$ –функции определенные почти всюду в интервале $(0,1)$ со значениями в H, A_j ($j=\overline{0,\,3}$)–линейные операторы в H. Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории распределений [12].

Обозначим через $L_2((0,\ 1):H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$ определенных в $(0,1)$ почти всюду, со значениями в H, измеримых и квадратично интегрируемых по Бохнеру, причем

$$\|f\|_{L_2((0,\ 1):H)}=\left(\int_0^1\|f(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Следуя монографии [1] введем гильбертово пространство

$$W_2^3((0,1),H)=\left\{u:\ u'''\in L_2((0,1):H),\ A^3u\in L_2((0,1):H)\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3((0,\ 1):H)}=\left(\|u'''\|^2_{L_2((0,\ 1):H}+\|A^3u\|^2_{L_2((0,\ 1):H}\right)^{1/2}.$$

Из теоремы о следах [1] следует, что линейное множество

$$\overset{\circ}{W}{}_2^3\big((0,\ 1);H\big)=\left\{u:\ \ u\in W_2^3\big((0,\ 1):H\big),\ u(0)=0,\quad u'(1)=u''(1)=0\right\}$$

есть полное подпространство пространства $W_2^3((0,\ 1):,H)$.

Аналогично определяются пространства $L_2(R;\,H)$ и $W_2^3(R,H)$ при $R=(-\infty,\ \infty)$.

Определение 1. Если при $f(t)\in L_2((0,1):\ H)$, существует функция $u(t)\in W_2^3((0,1):H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $(0,1)$, то она называется регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t)\in L_2((0,1):H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), которое удовлетворяет краевым условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)\|_{5/2}=0\,,\qquad \lim_{t\to1-0}\|u'(t)\|_{3/2}=0\,,\qquad \lim_{t\to1-0}\|u''(t)\|_{1/2}=0$$

и оценке

$$\|u\|_{W_2^3((0,\ 1):H)}\le const\|f\|_{L_2((0,\ 1):H)}$$

то, задача (1), (2) называется регулярно разрешимой.

В данной работе мы находим достаточные условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2).

Отметим, что регулярно разрешимость некоторых краевых задач на полуоси для операторно–дифференциальных уравнений исследованы, например, в работах [1,4,5,7-11,13]. В конечной области регулярно–

разрешимость операторно–дифференциальных уравнений второго порядка исследованы, например, в работах [2,3,6,14-16]. В конечноь отрезке краевые задачи для полного операторно –дифференциального уравнения третьего порядка почти не исследованы. Причина этого состоит в том, что в конечной области оценки нормы операторов промежуточных производных или нахождения их точных значений не известны. В этой работе мы в некотором подпространстве оцениваем нормы операторов промежуточных производных, через главную часть уравнения и связываем их с регулярной разрешимостью задачи (1), (2).

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$ определим следующие операторы

$$P_0 u = u'''(t) + A^3 u(t), \quad P_1 u = \sum_{j=0}^{3} A_{3-j} u^{(j)}(t), \quad u \in \overset{0}{W}{}_2^3((0,\ 1):H).$$

Очевидно, что операторы P_0 и P_1 ограничены из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$ в $L_2((0,1):\ H)$, если выполняются следующие условия:

1) A - положительно –определенный самосопряженный оператор;

2) операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = \overline{0,\ 3}$) ограничены в H .

Действительно при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$

$$\|P_0 u\|_{L_2((0,\ 1):H)} \le \sqrt{2}\left(\|u'''\|^2_{L_2((0,\ 1);H)} + \|A^3 u\|^2_{L_2((0,\ 1);H)}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\|u\|_{W_2^3((0,\ 1):H)}$$

и используя теорему о промежуточных производных [1] имеем

$$\|P_1 u\|_{L_2((0,1):\ H)} \le \sum_{j=0}^{3} \|B_{3-j}\| \left\|A^{3-j} u^{(j)}\right\|_{L_2((0,1):\ H)} \le const\|u\|_{W_2^3((0,\ 1):H)}.$$

2. Разрешимость краевой задачи для простого уравнения

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$ на $L_2((0,1):\ H)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы, по теореме Банаха об обратном операторе, достаточно доказать, что $\operatorname{Ker} P_0 = \{0\}$ и $\operatorname{Im} P_0 = L_2((0,1):H)$.

Так как общее решение уравнения $u'''(t) + A^3 u(t) = 0$ из пространства $W_2^3((0,1):H)$ имеет вид

$$u_0(t) = e^{\omega_1 t A} x_1 + e^{\omega_2 (t-1) A} x_2 + e^{\omega_3 (t-1) A} x_3$$

где $x_1,\ x_2,\ x_3 \in H_{5/2}$, $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, и $e^{\omega_1 t A},\ e^{-\omega_2 t A},\ e^{-\omega_3 t A}$ полугруппы линейных ограниченных операторов порожденные операторами $\omega_1 A,\ (-\omega_2 A)$ и $(-\omega_3 A)$ соответственно. Из условия (2) ($u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$) следует, что $x_1,\ x_2,\ x_3$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + e^{-\omega_2 A}x_2 + e^{-\omega_3 A}x_3 = 0, \\ \omega_1 A e^{\omega_1 A}x_1 + \omega_2 A x_2 + \omega_3 A x_3 = 0, \\ \omega_1^2 A^2 e^{\omega_1 A}x_1 + \omega_2^2 A^2 x_2 + \omega_3^2 A^2 x_3 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + e^{-\omega_2 A}x_2 + e^{-\omega_3 A}x_3 = 0, \\ \omega_1 e^{\omega_1 A}x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 = 0, \\ \omega_1^2 e^{\omega_1 A}x_1 + \omega_2^2 x_2 + \omega_3^2 x_3 = 0. \end{cases}$$

Покажем, что оператор –матрица

$$\Delta(A) = \begin{pmatrix} E & e^{-\omega_2 A} & e^{-\omega_3 A} \\ \omega_1 e^{\omega_1 A} & \omega_2 E & \omega_3 E \\ \omega_1 e^{\omega_1 A} & \omega_2^2 E & \omega_3^3 E \end{pmatrix}$$

ограниченно обратима в $H_{5/2} \times H_{5/2} \times H_{5/2} = H_{5/2}^3$.

Пусть $A \ge \mu_0 E$. В области $[\mu_0,\ \infty)$ рассмотрим матриц –функцию

$$\Delta(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\omega_2 \mu} & e^{-\omega_3 \mu} \\ \omega_1 e^{\omega_1 \mu} & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 e^{\omega_1 \mu} & \omega_2^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in [\mu_0,\ \infty).$$

Очевидно, что при $\mu \to \infty$, $\Delta(\mu) \to \Delta(\infty)$, где

$$\Delta(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & \omega_2^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}.$$

Так как $|\Delta(\infty)| = \lim\limits_{n\to\infty}|\Delta(\mu)| = |\omega_2\omega_3||\omega_2 - \omega_3| = \sqrt{3}$, то при больших $R_0 > 0$, $\Delta(\mu)$ также обратим, т.е. $|\Delta(\mu)| \ge c_0 > 0$, $\mu > R_0$.

Пусть теперь $\mu \in [\mu_0, R_0]$. Покажем, что в этом случае, также $|\Delta(\mu)| \geq c_1 > 0$. Действительно, если при некотором μ, $\Delta(\mu) = 0$, то существуют числа ξ_1, ξ_2 и ξ_3 такие, что $|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| \neq 0$ и

$$\begin{cases} \xi_1 + e^{-\omega_2\mu}\xi_2 + e^{-\omega_3\mu}\xi_3 = 0, \\ \omega_1 e^{\omega_1\mu}\xi_1 + \omega_2\xi_2 + \omega_3\xi_3 = 0, \\ \omega_1^2 e^{\omega_1\mu}\xi_1 + \omega_2^2\xi_2 + \omega_3^2\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Это означает, что

$$\xi(t) = e^{\omega_1 t\mu}\xi_1 + e^{\omega_2(t-1)\mu}\xi_2 + e^{\omega_3 1(t-1)\mu}\xi_3, \qquad t \in (0,\ 1)$$

удовлетворяет краевой задаче

$$\xi'''(t) + \mu^3\xi(t) = 0,\ t \in (0,\ 1) \tag{3}$$

$$\xi(0) = 0,\ \xi'(1) = \xi''(1) = 0.$$

Так как, после интегрирования по частям получаем, что

$$\left(\xi'''(t),\ \xi(t)\right)_{L_2(0,\ 1)} = \int_0^1 \xi'''(t)\overline{\xi(t)}dt = \xi''(t)\overline{\xi(t)}\Big|_0^1 - \xi'(t)\overline{\xi'(t)}\Big|_0^1 -$$

$$-\left(\xi(t)\overline{\xi''(t)}\right)\Big|_0^1 - \left(\xi(t), \xi'''(t)\right)_{L_2(0,1)},$$

то учитывая, что $\xi(0) = 0$, $\xi'(1) = 0$, $\xi''(1) = 0$ получаем, что

$$2\,\mathrm{Re}\left(\xi'''(t),\ \xi(t)\right)_{L_2(0,\ 1)} = |\xi'(0)|^2.$$

Тогда из уравнения (3) имеем:

$$0 = 2\,\mathrm{Re}\left(\xi'''(t),\ \xi(t)\right)_{L_2(0,\ 1)} + \mu^3|\xi(t)|^2_{L_2(0,\ 1)} = |\xi'(0)|^2 + \mu^3|\xi(t)|^2_{L_2(0,\ 1)}.$$

Таким образом, $\xi(t) = 0$, т.е. $\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0$. Так как $|\Delta(\mu)|$ есть непрерывная функция, то $|\Delta(\mu)| \geq c_1 > 0$, при $\mu \in [\mu_0,\ R_0]$. Таким образом, $|\Delta(\mu)| \geq const > 0$ при $\mu \in [\mu_0,\ \infty)$. Тогда $|\Delta(\mu)| \geq const$ и при $\mu \in \sigma(A)$. Используя спектральное разложение оператора A получаем, что $\Delta(A)$ обратим и $\|\Delta^{-1}(A)\| \leq const$. Так как $\Delta(A)$ обратим, то из уравнения $\Delta(A)\tilde{x} = 0$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)$ следует, что $\tilde{x} = 0$, т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Следовательно $u_0(t) = 0$. Теперь покажем, что уравнение $P_0 u = f$ имеет решение при любом $f \in L_2((0,\ 1): H)$. Пусть

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (0,\ 1) \\ 0, & t \in R \setminus (0,1). \end{cases}$$

Очевидно, что $f_1(t) \in L_2(R;\, H)$ и $\|f\|_{L_2(R;H)} = \|f\|_{L_2((0,1):H)}$. Обозначим, через $\hat{f}_1(\lambda)$ преобразование Фурье функции $f_1(t)$. Построим функцию

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (i^3\lambda^3 E + A^3)^{-1}\, \hat{f}_1(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda\,, \qquad t \in R = (-\infty, \infty)\,.$$

Покажем, что $u_1(t) \in W_2^3(R:H)^1$. По теореме Планшареля имеем:

$$\|u_1\|^2_{W_2^3(R:H)} = \|u_1'''\|^2_{L_2(R:H)} + \left\|A^3 u_1\right\|^2_{L_{2(R:H)}} = \left\|\lambda^3 \hat{u}_1(\lambda)\right\|^2_{L_2(R:H)} + \left\|A^3 \hat{u}_1(\lambda)\right\|^2_{L_2(R\,:H)}\,. \tag{4}$$

Так как $\hat{u}_1(\lambda) = (i^3\lambda^3 E + A^3)^{-1} f_1(\lambda)$, то

$$\begin{aligned} \left\|A^3 \hat{u}_1(\lambda)\right\|_{L_2(R:H)} &= \left\|A^3((i\lambda)^3 E + A^3)^{-1} \hat{f}_1(\lambda)\right\|_{L_2(R\,:H)} \le \\ \le \sup_{\lambda\in R} \left\|A^3((i\lambda)^3 E + A^3)^{-1}\right\| \cdot \left\|\hat{f}_1(\lambda)\right\|_{L_2(R;\,H)} &= \sup_{\lambda\in R} \left\|A^3((i\lambda)^3 E + A^3)^{-1}\right\| \cdot \|f\|_{L_2((0,1):H)}. \end{aligned} \tag{5}$$

С другой стороны из спектрального разложения A следует, что при любом $\lambda \in R$

$$\left\|A^3((i\lambda)^3 E + A^3)^{-1}\right\| = \sup_{\mu\in\sigma(A)} \left|\mu^3((i\lambda)^3 + \mu^3)^{-1}\right| \le \sup_{\mu\ge\mu_0>0} \left|\mu^3(\lambda^6 + \mu^6)^{-1/2}\right| \le 1$$

и

$$\left\|\lambda^3((i\lambda)^3 E + A^3)^{-1}\right\| \le \sup_{\mu\in\sigma(A)} \left|\lambda^3((i\lambda)^3 + \mu^3)^{-1}\right| \le \sup_{\mu\ge\mu_0>0} \left|\lambda^3(\lambda^6 + \mu^6)^{-1/2}\right| \le 1\,.$$

Тогда

$$\left\|A^3 \hat{u}_1(\lambda)\right\| \le \|f\|_{L_2((0,1):H)}, \;\; \left\|\lambda^3 \hat{u}_1(\lambda)\right\|_{L_2(R:H)} \le \|f\|_{L_2((0,1):H)}\,.$$

Получаем, что

$$\|u_1\|_{W_2^3((0,\;\;1):H)} \le 2\|f\|_{L_2((0,1):H)}\,.$$

Пусть $\omega_1(t)$ есть сужение функции $u_1(t)$ на $[0,\,1]$. Тогда очевидно, что $\omega_1(t) \in W_2^3((0,1):\,H)$ и по теореме о следах $\omega_1^{(j)}(0) \in H_{3-j-1/2}$, $\omega^{(j)}(1) \in H_{3-j-1/2}$, $j = 0,1,2$ и

$$\left\|\omega_1^{(j)}(0)\right\|_{3-j-1/2} \le const\|f\|_{L_2((0,1):H)}, \;\; \left\|\omega^{(j)}(1)\right\|_{3-j-1/2} \le const\|f\|_{L_2((0,1):H)}\,.$$

Теперь будем искать решение уравнения $P_0 u = f$ в виде

$$u(t) = \omega_1(t) + e^{\omega_1 tA} x_1 + e^{\omega_2(t-1)A} x_2 + e^{\omega_3(t-1)A} x_3\,,$$

где x_1, x_2 и $x_3 \in H_{7/2}$ пока неизвестные векторы, которые принадлежать определению. Из условия (2) следует, что

$$\begin{cases} x_1 + e^{-\omega_2 A} x_2 + e^{-\omega_3 A} x_3 = -\omega_1(0) \\ \omega_1 e^{\omega_1 A} x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 = -A^{-1}\omega_1'(1) \\ \omega_1^2 e^{\omega_1 A} x_1 + \omega_2^2 x_2 + \omega_3^2 x_3 = -A^{-2}\omega_1''(1) \end{cases}.$$

т.е.
$\Delta(A)\tilde{x}=\tilde{\varphi}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi=(-\omega_1(0),-A^{-1}\omega_1'(1),-A^{-2}\omega_2'(1))\in H_{5/2}^3$.
Так как $\Delta(A)$ обратим в $H_{5/2}$, то $\tilde{x}=\Delta^{-1}(A)\tilde{\varphi}$, т.е. $\tilde{x}=(x_1,x_2,x_3)\in H_{5/2}^3$. Таким образом, $u\in W_2^3((0,1):H)$. Следовательно, $\operatorname{Im}P_0=L_2((0,1):H)$. Теорема доказана.

3. Оценки норм промежуточных производных

Теперь займемся оценкой промежуточных производных.Сперва докажем следующую лемму

Лемма 1. Пусть выполняется условия 1). Тогда при любом $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,\,1):H)$ имеет место равенство

$$\|P_0u\|^2_{L_2((0,1):H)}=\|u\|^2_{W_2^3((0,1):H)}+\|u'(0)\|_{3/2}.$$

Доказательство. Пусть $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,\,1):H)$, т.е. $u(0)=0$, $u'(1)=0$, $u''(1)=0$. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned}\|P_0u\|^2_{L_2(0,\,1):H)}&=\left\|u'''+A^3u\right\|^2_{L_2((0,\,1):H)}=\|u\|^2_{L_2((0,1):H)}+\\&+\left\|A^3u\right\|^2_{L_2((0,1):H)}+2\operatorname{Re}\left(u''',\,A^3u\right)_{L_2(0,1):H)}\end{aligned}. \tag{6}$$

Интегрируя по частям имеем:

$$\left(u''',\,A^3u\right)_{L_2(0,\,1):H)}=\int_0^1(u'''(t),A^3u(t))dt=\left(A^{1/2}u''(t),A^{5/2}u(t)\right)\Big|_0^1-$$

$$-\left(A^{3/2}u'(t),\,A^{3/2}u'(t)\right)\Big|_0^1+\left(A^{5/2}u(t),\,A^{1/2}u''(t)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(A^3u(t),\;\;u'''(t)\right)dt.$$

Учитывая, что $u(0)=0$, $u'(1)=0$, $u''(1)=0$ отсюда получаем, что

$$\left(u''',\,A^3u\right)_{L_2(0,\,1):H)}=\left\|A^{3/2}u'(0)\right\|^2-\left(A^3u,u'''\right)_{L_2((0,1):H)}.$$

Следовательно ,

$$2\operatorname{Re}\left(u''',\,A^3u\right)_{L_2(0,\,1):H)}=\|u'(0)\|^2_{3/2}.$$

Учитывая это равенство в (6). получаем верность равенства (5).
Теорема 2. Пусть выполняется условие 1). Тогда при любом $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,\,1):H)$ имеет место неравенство

$$\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2((0,1):H)}\le c_j\|P_0u\|_{L_2((0,1):H)},\qquad j=\overline{0,\,3} \tag{7}$$

где $c_0 = c_3 = 1$, $c_1 = \dfrac{2^{2/3}}{3^{1/2}}$, $c_2 = \dfrac{2}{3^{1/2}}$.

Доказательство. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$ ($u(0)=0,\ u'(1)=0,\ u''(1)=0$). Тогда по лемме 1 имеем

$$\|P_0 u\|^2_{L_2((0,1):H)} = \|u'''\|^2_{L_2((0,1):H)} + \left\|A^3 u\right\|^2_{L_2((0,1):H)} + \|u'(0)\|^2_{3/2}$$

т.е.

$$\left\|A^3 u\right\|_{L_2((0,1):H)} \le \|P_0 u\|_{L_2((0,1):H)}$$

и

$$\|u'''\|_{L_2((0,1):H)} \le \|P_0 u\|_{L_2((0,1):H)},$$

т.е. неравенство (7) верно при $j=0$ и $j=1$. Теперь рассмотрим случай $j=1$ и $j=2$. Очевидно, что при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$

$$\left\|A^2 u'\right\|^2_{L_2((0,1):H)} = \left(A^2 u', A^2 u'\right)_{L_2((0,\,1):H)} =$$
$$= \left(A^{5/2} u(t),\ A^{3/2} u'(t)\right)\Big|_0^1 - \left(A^3 u,\ Au''\right)_{L_2((0,\,1):H)}.$$

Так как $u(0)=0,\ u'(1)=0$, то $\left(A^{5/2}u(1),\ A^{3/2}u'(1)\right) - \left(A^{5/2}u(0),\ A^{3/2}u'(0)\right) = 0$ и

$$\left\|A^2 u'\right\|_{L_2((0,1):H)} = -(A^3 u,\ Au'')_{L_2((0,1):H)} \le \left\|A^3 u\right\|_{L_2((0,\,1):H)} \cdot \|Au''\|_{L_2((0,1):H)}. \tag{8}$$

Пусть $\eta > 0$ некоторое положительное число. Тогда при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$ имеем:

$$\left\|\eta u''' + Au'' + \frac{1}{\eta} Au'\right\|_{L_2((0,T):H)} = \eta^2 \|u'''\|^2_{L_2((0,1):H)} + \|Au''\|^2_{L_2((0,1):H)} +$$
$$+ \frac{1}{\eta^2}\|Au'\|^2_{L_2((0,1):H)} + 2\eta\,\mathrm{Re}(u''',\ Au'')_{L_2((0,1):H)} + 2\,\mathrm{Re}(u''',\ Au')_{L_2((0,1):\,H)} + \tag{9}$$
$$+ \frac{1}{\eta} 2\,\mathrm{Re}(Au'',\ A^2 u)_{L_2((0,1):\,H)}$$

Интегрируя по частям получаем:

$$(u''', Au'')_{L_2((0,\,1):\,H)} = \left(A^{1/2}u''(t),\ A^{1/2}u''(t)\right)\Big|_0^1 - \left(Au'',\ A^3 u\right)_{L_2((0,\,1):\,H)} =$$
$$= \left(\|u''(1)\|^2_{1/2} - \|u''(0)\|^2_{1/2}\right) - \left(Au'',\ A^3 u\right)_{L_2((0,\,1):\,H)} =$$
$$= -\|u''(0)\|^2_{1/2} - \left(Au'',\ A^3 u\right)_{L_2((0,1):\,H)},$$

т.е.

$$2\eta\,\mathrm{Re}(u'',\ Au'') = -\eta\left\|u''(0)\right\|_{1/2}^{2}. \tag{10}$$

Аналогично получаем

$$(u''',\ A^2u')_{L_2((0,1):\,H)} = \left(A^{1/2}u''(t),\ A^{3/2}u'(t)\right)\Big|_0^1 - \left(A^2u'',\ Au''\right)_{L_2((0,1):\,H)}$$

т.е.

$$\begin{aligned}&2\,\mathrm{Re}(u''',\ A^2u')_{L_2((0,1):\,H)} = \\ &= -2\,\mathrm{Re}\left(A^{1/2}u''(0),\ A^{3/2}u'(0)\right) - \left\|Au''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2}\end{aligned} \tag{11}$$

и

$$(Au'', A^2u')_{L_2((0,1):\,H)} = \left(A^{3/2}u'(t),\ A^{3/2}u'(t)\right)\Big|_0^1 - \left(A^2u',\ Au''\right)_{L_2((0,1):\,H)},$$

т.е.

$$2\frac{1}{\eta}\,\mathrm{Re}(Au'',\ A^2u')_{L_2((0,1):\,H)} = -\frac{1}{\eta}\left\|u'(0)\right\|_{3/2}^{2}. \tag{12}$$

Следовательно, учитывая равенства (10)-(12) в (9) получаем:

$$\left\|\eta u''' + Au'' + \frac{1}{\eta}Au'\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} = \eta^2\left\|u'''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} + \frac{1}{\eta^2}\left\|A^2u'\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} -$$

$$-\left\|Au''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} - \left\|\sqrt{\eta}A^{1/2}u''(0) + \frac{1}{\sqrt{\eta}}A^{3/2}u'(0)\right\|^{2}.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}&\left\|Au''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} + \left\|\eta u''' + Au'' + \frac{1}{\eta}Au'\right\|^{2} \le \\ &\le \eta^2\left\|u'''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} + \frac{1}{\eta^2}\left\|A^2u'\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2}\end{aligned}.$$

Пологая

$$\eta^2 = \frac{\left\|A^2u'\right\|_{L_2((0,1):\,H)}}{\left\|u'''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}}$$

получаем, что

$$\left\|Au''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} \le 2\left\|u'''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}\cdot\left\|A^2u'\right\|_{L_2((0,1):\,H)}. \tag{13}$$

Учитывая неравенства (13) в (8) получаем

$$\left\|A^2u'\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{2} \le 2^{1/2}\left\|A^2u'\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{1/2}\cdot\left\|A^3u\right\|\cdot\left\|u'''\right\|_{L_2((0,1):\,H)}^{1/2}$$

или

$$\left\|A^2 u'\right\|^{3/2}_{L_2((0,1):\,H)} \le 2^{1/2}\left\|A^3\, u\right\|_{L_2((0,1):\,H)} \cdot \left\|u'''\right\|^{1/2}_{L_2((0,1):\,H)}$$

т.е.

$$\left\|A^2 u'\right\|_{L_2((0,1):\,H)} \le 2^{1/3}\left\|A^3\, u\right\|^{2/3} \cdot \left\|u'''\right\|^{1/3}_{L_2((0,1):\,H)}$$

или для любого $\varepsilon > 0$

$$\left\|A^2 u'\right\|^2_{L_2((0,1):\,H)} \le 2^{2/3}\left(\varepsilon\left\|A^3\, u\right\|^2_{L_2((0,1):\,H)}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|u'''\right\|^2\right)^{1/3}.$$

Применяя неравенства Гольдера получаем:

$$\left\|A^2 u'\right\|^2_{L_2((0,1):H)} \le 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\varepsilon\left\|A^3 u\right\|^2_{L_2((0,1):H)} + \frac{1}{3\varepsilon^2}\left\|u'''\right\|^2_{L_2((0,1):H)}\right).$$

Полагая $\frac{2}{3}\varepsilon = \frac{1}{3\varepsilon^2}$, т.е. $\varepsilon = 2^{-1/3}$ получаем, что

$$\left\|A^2 u'\right\|^2_{L_2((0,\,1):H)} \le 2^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^{-1/2}\left(\left\|A^3 u\right\|^2_{L_2((0,\,1):H)} + \left\|u'''\right\|^2_{L_2((0,\,1):H)}\right) =$$

$$= 2^{2/3} \cdot \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\left\|u\right\|^2_{W_2^3((0,1):H)} = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3}\left\|u\right\|^2_{W_2^3((0,1):\,H)} \le \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3}\left\|P_0 u\right\|^2_{L_2((0,\,1):\,H)}$$

т.е.

$$\left\|A^2 u'\right\|_{L_2((0,\,1):H)} \le \frac{2^{2/3}}{3^{1/2}}\left\|P_0 u\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}.$$

Таким образом неравенство (7) верно и при $j = 1$.

Теперь докажем неравенство (7) при $j = 2$. Учитывая неравенство (8) в (13) имеем

$$\left\|Au''\right\|^2_{L_2((0,\,1):\,H)} \le 2 \cdot \left\|u'''\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)} \cdot \left\|Au''\right\|^{1/2}_{L_2((0,1):\,H)} \cdot \left\|A^3 u\right\|^{1/2}_{L_2((0,\,1):\,H)},$$

т.е.

$$\left\|Au''\right\|^{3/2}_{L_2((0,\,1):\,H)} \le 2 \cdot \left\|u'''\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)} \cdot \left\|A^3 u\right\|^{1/2}_{L_2((0,\,1):\,H)}$$

или

$$\left\|Au''\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)} \le 2^{\frac{2}{3}} \cdot \left\|u'''\right\|^{2/3}_{L_2((0,\,1):\,H)} \cdot \left\|A^3 u\right\|^{1/3}_{L_2((0,\,1):\,H)}.$$

Отсюда имеем, что при $\varepsilon > 0$

$$\|Au''\|^2_{L_2((0,1):H)} \le 2^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\varepsilon\|u'''\|^2\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|A^3u\|^2_{L_2((0,1):H)}\right)^{\frac{1}{3}} \le$$

$$\le 2^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2}{3}\varepsilon\|u'''\|^2_{L_2((0,1):H)} + \frac{1}{3\varepsilon^2}\|A^3u\|^2_{L_2((0,1):H)}\right).$$

Полагая $\frac{2}{3}\varepsilon = \frac{1}{3\varepsilon^2}$, т.е. $\varepsilon = 2^{-1/3}$ получаем, что

$$\|Au''\|^2_{L_2((0,1):H)} \le 2^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\|u\|^2_{W_2^3((0,1):H)} = ,$$

$$= \frac{2^2}{3}\|u\|^2_{W_2^3((0,1):H)} \le \frac{2^2}{3}\|P_0u\|^2_{L_2((0,1):H)}$$

т.е.

$$\|Au''\|_{L_2((0,1):H)} \le \frac{2}{3^{1/2}}\|P_0u\|_{L_2((0,1):H)}.$$

Теорема доказана.

4. Основная теорема о регулярной разрешимости краевой задачи

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$q = \sum_{j=0}^{3} c_j \|B_{3-j}\| < 1 \quad (B_j = A_j A^{-j}, \quad j = \overline{0,3}),$$

где $c_0 = c_3 = 1$, $c_1 = \frac{2^{2/3}}{3^{1/2}}$, $c_2 = \frac{2}{3^{1/2}}$. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде уравнения $Pu = P_0u + P_1u = f$, где $f \in L_2((0,1):H)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$. По теореме 1 $P_0^{-1}: L_2((0,1):H) \to \overset{\circ}{W}{}_2^3((0,1):H)$ есть изоморфизм. Полагая $u = P_0^{-1}\upsilon$, $\upsilon \in L_2((0,1):H)$ получаем уравнение $\upsilon + P_1P_0^{-1}\upsilon = f$ в $L_2((0,1):H)$. При любом $\upsilon \in L_2((0,1):H)$ имеем

$$\left\|P_1P_0^{-1}\upsilon\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}=\left\|P_1u\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}\le\sum_{j=0}^{3}\left\|A_{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{3}\left\|B_{3-j}\right\|\cdot\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}.$$

Учитывая теорему 2 отсюда получаем

$$\left\|P_1P_0^{-1}\upsilon\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}\le\sum_{j=0}^{3}\left\|B_{3-j}\right\|\cdot c_j\left\|P_0u\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{3}c_j\left\|B_{3-j}\right\|\cdot\left\|\upsilon\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}=q\left\|\upsilon\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}.$$

По условию теоремы $0<q<1$. Тогда оператор $E+P_1P_0^{-1}$ обратим в $L_2((0,1):H)$ и $\upsilon=\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$. Отсюда получаем $u=P_0^{-1}\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$ и

$$\left\|u\right\|_{W_2^3((0,\,1):\,H)}\le const\left\|f\right\|_{L_2((0,\,1):\,H)}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Mirzoev S.S., Generalization of one M.G. Gasimov theorem on solvability of a boundary –value problem for second order operator –differential equation of elliptic type, Proceeding of the Institute of Math. and Mechanics NAS of Azerbaijan Vol.40, Special Issue, 2014, pp.300-307.
2. Mirzoev S.S., Agayeva G.A., On correct solvability of boundary value problem for the differential equations of the second order in the Hilbert space, Applied Mathematical Sciences, 2013, Vol.7, No. 9, pp.3935-3945.
3. Mirzoev S.S., Agayeva G.A., On the solvability conditions of one boundary value problem for the second order differential equations with operator coefficients, International Journal of Matematical Analysis, 2014, Vol.8, pp.149-156.
4. Mirzoev S.S., Aliyev A.R., Rustamova L.A., On the boundary value problem with the operator in boundary conditions for the operator – differential equation of second order with discontinuous coefficients, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, Vol.9, No. 2, 2013, pp.207-226.
5. Mirzoev S.S., Rustamova L.A., On the solvability of one boundary value problem for operator–differential equations of second order with

discontinuous coefficients, An International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2006, Vol.5, pp.192-200.
6. Salimov M.Yu., On conditions of correct solvability of the boundary value problem for one class of the second order operator-differential equations on finite segment, Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 2001, Vol.14, No. 22, pp.94-99.
7. Алиев А.Р., Краевая задача для одного класса операторно – дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, Математ.заметки, 2003, том.74, No. 6, с.803-814.
8. Алиев А.Р., О краевой задачи для одного класса операторно – дифференциальных уравнений нечетного порядка с переменными коэффициентами, Докл. РАН, 2008, том.4241, No. 2, с.151-153.
9. Алиев А.Р., Мирзоев С.С., К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно –дифференциальных уравнений высокого порядка, Функциональный анализ и его приложения, 2010, том.44, вып. 3, с.747-750.
10. Гасымов М.Г., К теории полиномиальных операторных пучков, ДАН СССР, 1971, том.199, No. 4, с.747-750.
11. Керимов К.А., Мирзоев С.С., Об одной задаче для операторно – дифференциального уравнения второго порядка с нелокальным краевом условиям, Математические заметки, 2013, Том.94, вып.3, с.349-353.
12. Лионс Ж.Л., Манженес Э., Неоднородные краевые задачи и их приложения, Москва, Мир, 1971, 371 с.
13. Мирзоев С.С., Гулиева Ф.А., О полноте элементарных решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами, Математические заметки, 2009, Том.86, No. 5, с.797-800.
14. Мирзоев С.С., Караaслан М.Д., Гумбаталиев Р.З., К теории операторно-дифференциальных уравнений второго порядка,Докл. РАН, 2013, Том.453, с.610-612.
15. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю., О полноте элементарных решений одного класса операторно–дифференциальных уравнений второго порядка, Сибирский математический журнал, 2010, Том.51, No. 4, с.815-828.
16. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю., О разрешимости краевой задачи для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с

операторном коэффициентом в краевом условии, Математические заметки, 2012, Том.91. вып. 6, с.861-869.

Üç tərtibli operator–diferensial tənlik üçün sonlu parçada bir sərhəd məsələsinin həll olunması haqqında

S.S. Mirzəyev, S.B. Heydərova

XÜLASƏ

İşdə separabel Hilbert fəzasında sonlu oblastda üç tərtibli operator –diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin requlyar həllinin varlığını və yeganəliyini təmin edən şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər operator –diferensial tənliyin əmsallarının xassələri ilə ifadə olunmuşdur. Bununla belə sərhəd məsələsindəki sərhəd şərtləri ilə bağlı bəzi abstrakt Sobelev tipli fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilmişdir. Bu qiymətləndirmələr operator –diferensial tənliyin baş hissəsinə görə aparılmışdır. İşdə bu qiymətləndirmələrin sərhəd məsələsinin həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi də göstərilmişdir.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator –diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, requlyar həll.

On a solvability of a boundary problem for the operator –differential equation of the third order in the finite interval

S.S. Mirzoyev, S.B. Heydarova

ABSTRACT

In the work the conditions are found which provide existence and uniqueness of the regular solutions of a boundary problem in the finite interval for the operator – differential equation of the third order in the separable Hilbert space. These conditions are expressed by the properties of the operator coefficients of the considered equation. The estimations are obtained for the norms of the auxiliary derivatives in some abstract spaces type of Sobolev, which related with boundary conditions of the boundary problem. These estimations are given with respect to generated by the main part of the operator – differential equation. In the work the relationship is given between these estimations and the conditions of the regular solvability of the boundary problem.

Keywords: Hilbert space, operator–differential equation, boundary problem, regular solution, linear operator.